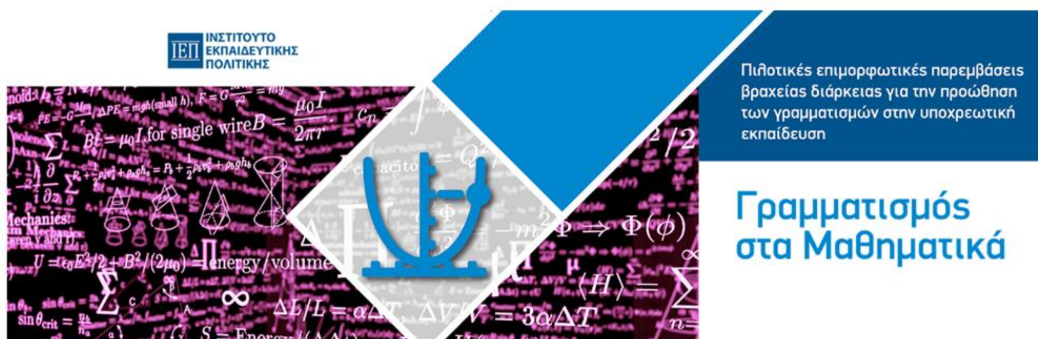
Εργασία στα πλαίσια σεμιναρίου του Ι.Ε.Π. «Γραμματισμός στα Μαθηματικά»



Το Μαθηματικό αντικείμενο «σύνολο (0,1)» και κάποιες απροσδόκητες ιδιότητές του.

Επιμορφούμενοι

Πλατάρος Ιωάννης ΠΕ-03 & κριτική φίλη, Τσαμπούρη Άννα ΠΕ-03

Επιμορφωτές στο τμήμα Ι, 15 Μαΐου -26 Ιουνίου 2020:

Γεώργιος Η. Μπαραλής Αναπληρωτής Καθηγητής Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Ε.Κ.Π.Α., Αντιπρόεδρος Ι.Ε.Π

Νικόλαος Μαυρογιάννης Σύμβουλος Α΄ Μαθηματικών στο ΙΕΠ

Παναγιώτης Πηλιούρας Εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

ΙΟΥΝΙΟΣ 2020

Το Μαθηματικό αντικείμενο «σύνολο (0,1)» και κάποιες απροσδόκητες ιδιότητές του.

Εργασία στα πλαίσια σεμιναρίου του ΙΕΠ « Γραμματισμός στα Μαθηματικά» (τμήμα 1, 15 Μαΐου -26 Ιουνίου 2020)

Πλατάρος Ιωάννης ΠΕ-03 & κριτική φίλη, Τσαμπούρη Άννα ΠΕ-03

Τάξη Α΄ Λυκείου

Διάρκεια 2 ώρες + 1 ώρα διαπραγμάτευση της κατ΄οίκον εργασίας

Μάθημα: Διαθεματικό, διακλαδικό Άλγεβρας -Γεωμετρίας

Μέσα τρόπος υλοποίησης

Υλοποιείται με βιντεοπροβολέα είτε διαδραστικό πίνακα και ένα Φύλλο Εργασίας με εργασία κατά ομάδες 3 μαθητών.

Σκοποί και στόχοι:

- Να αποδείξουν οι μαθητές ότι 0,9999….=1 και ως πρώτο βήμα της διερεύνησης ότι το (0,1) δεν έχει μέγιστο αλλά ούτε και ελάχιστο στοιχείο.
- Να συνειδητοποιήσουν, μέσω γνωστικής σύγκρουσης, μετά την απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, ότι αφού δεν έχει μέγιστο είτε ελάχιστο, είναι απέραντο με την έννοια του ότι δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος, έστω και αν έχει πεπερασμένο μήκος.
- Να δουν μέσω ενός δυναμικού γεωμετρικού μοντέλου συνάρτησης, ότι το (0,1) τίθεται σε 1-1 και επί απεικόνιση με το $(\infty,+\infty)$ και να διαπιστώσουν ότι υπάρχουν παραστάσεις συναρτήσεων, που δεν είναι τύποι, ή πίνακες ή διαγράμματα ή καρτεσιανό γινόμενο ή σχέση συνόλων μόνο.
- Να δουν , πώς υλοποιείται το μοντέλο Κλάιν για την Υπερβολική Γεωμετρία στο ένα σκέλος της άρνησης του 5^{o} αιτήματος του Ευκλείδη, με συνέπεια σε όλα τα είδη Γεωμετριών που προέρχονται από την άρνηση του Ευκλειδείου αξιώματος στο ότι οι ευθείες και ο χώρος δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος («…άγεται όχι μοναδική παράλληλη» = «…άγονται δύο τουλάχιστον παράλληλες ή καμία

παράλληλη» ήτοι, έχουμε την Υπερβολική Γεωμετρία είτε την Παραβολική Γεωμετρία.)

- Στο μοντέλο της Σφαιρικής -Παραβολικής Γεωμετρίας, να δουν πώς υλοποιείται το «απέραντη ευθεία» μέσω μοντέλου του κύκλου και πώς υλοποιείται το «ευθύγραμμα τμήμα» ως «τόξο μέγιστου κύκλου», με την ιδιότητα του «συντομότερου δρόμου μεταξύ δύο σημείων»
- Να συζητήσουν και να εμπεδώσουν αναστοχαστικά, μέσω δημοσίου διαλόγου και διαπραγμάτευσης στην τάξη , σε κάποιο βαθμό, ότι η διαίσθηση απατά και ότι η μαθηματική απόδειξη είναι υπεράνω της όποιας ανθρώπινης διαίσθησης.
- Να είναι σε θέση να εξηγούν την κεντρική ιδέα των παραδόξων του Ζήνωνος, που έγκειται στην διαπίστωση, ότι οποιοδήποτε συνεχές θετικό μέγεθος πεπερασμένο χωρίζεται σε άπειρους πεπερασμένους προσθετέους, αλλά κυρίως το αντίστροφο, ότι «όταν έχουμε άπειρο πλήθος θετικών προσθετέων, δεν σημαίνει ότι έχουμε και άπειρο άθροισμα», όπου **έγκειται και ο πυρήνας** των παραδόξων του Ζήνωνος , όπως και **το κλειδί** για την εξήγησή τους.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΤΕΡΕΣ ΕΡΩΤΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ «ΠΩΣ» & το «ΓΙΑΤΙ» ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

1. Ποιο είναι το μαθηματικό αντικείμενο της παρέμβασης;

Το σύνολο (0,1) και κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητές του:

- Ότι δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο.
- Ότι το προφανέστατα εικαζόμενο μέγιστο 0,999… δεν είναι, αφού κάνει 1.
- Ομοίως συμβαίνει το ανάλογο αν θεωρήσουμε το (0,1) ως ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα.
- Την συνειδητοποίηση της κόντρα διαίσθησης ότι κόβοντας τα άκρα είτε πέρατα αντικειμένου, εξακολουθεί πάντα να έχει καινούργια άκρα είτε πέρατα.
- Ότι το (0,1) ως μην έχον πέρατα είναι αυτομάτως α-πέραντο έστω και πεπερασμένου μήκους. Είναι κάτι δεν συνιστά αντίφαση και υλοποιεί την α-πέραντη ευθεία στο μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας του Κλάϊν. Όπως και ο κύκλος στο μοντέλο της

Σφαιρικής -Παραβολικής Γεωμετρίας, που δεν έχει αρχή και τέλος, άρα πέρατα.

- Ότι το άθροισμα απείρων πεπερασμένων θετικών ποσοτήτων, δεν ισούται υποχρεωτικά με άπειρο, αλλά ενίοτε και με πεπερασμένη ποσότητα. Πόρισμα αυτού, είναι ότι με το πλέον διάσημο παράδειγμα της Γεωμετρικής Σειράς, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa}} = 1$ μπορεί ένας μαθητής να εξηγήσει απολύτως πειστικά σχεδόν τα περισσότερα από τα πιο γνωστά παράδοξα του Ζήνωνος, αφού λ.χ. αν το βέλος κάνει χρόνο τ για να καλύψει το μισό της διαδρομής του[1], θα κάνει τ/2 για το μισό της υπολειπόμενης, τ/4 για το υπόλοιπο μισό της υπολειπομένης κ.ο.κ. και τελικά 2τ χρόνο για τα άπειρα τεμάχια χρόνου, αφού ναι μεν είναι άπειρα στο πλήθος, αλλά πεπερασμένης διάρκειας
- Ότι **κάθε ένα**, **δηλ. όλα,** από τα άπειρα στοιχεία του (0,1) «ζευγαρώνει» με διαφορετικά στοιχεία του R. (αναμενόμενο) αλλά και ότι **κάθε ένα δηλ. όλα** τα στοιχεία του R , ζευγαρώνει με διαφορετικά στοιχεία του (0,1) (εκπληκτικό όταν συνειδητοποιείται.) Το μοντέλο μέσω του οποίου γίνεται η συνειδητοποίηση είναι δυναμικό άκρως εποπτικό γεωμετρικό μοντέλο συνάρτησης (απεικόνισης) που πέραν της εισαγωγής στην έννοια της 1-1 συνάρτησης συνιστά και μια μη διδασκόμενη στο Λύκειο αναπαράσταση της έννοιας της απεικόνισης-συνάρτησης.
- Ότι υπάρχει κεντρική πυρηνική απάντηση στα περισσότερα παράδοξα του Ζήνωνος που θα είναι σε θέση να ζώσουν οι ίδιοι οι μαθητές, μετά την περάτωση της διδακτικής παρέμβασης.

2. Γιατί αυτό είναι σημαντικό το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο;

- Η εμπέδωση της έννοιας του (0,1) ως απέραντου συνόλου μέσω απαγωγής σε άτοπο, υλοποιεί την προαπαιτούμενη γνώση ότι είναι ανοικτό σύνολο, καθώς το ανοικτό σύνολο ορίζεται με την έννοια της «ανοικτής σφαίρας» όπου κι αυτή είναι ανοικτό σύνολο.

[1] Η ταχύτητα, για απλοποίηση του ζητήματος, θεωρείται σταθερή.

- Η Γεωμετρική Σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\kappa}}=1$ είναι το πιο κοινό παράδειγμα σύγκλισης των Μαθηματικών και διασυνδέεται με πλήθος εφαρμογών.
- Επεξηγείται εποπτικά και πειστικά η ύπαρξη της Υπερβολική Γεωμετρίας, έστω και σε στοιχειώδες υπόδειγμα.
- Σχεδόν όλες οι παρεμβάσεις προκαλούν (το ξέρουμε εκ των προτέρων) μεγάλες και έντονες γνωστικές συγκρούσεις και αυτό είναι ό,τι πιο γόνιμο για μια διδακτική διαδικασία, αφού γνωστά υπάρχοντα γνωστικά εμπόδια είναι παρόντα στις έννοιες που διαπραγματεύεται η εργασία και που φιλοδοξεί να προλειάνει είτε αμβλύνει, αφού η όποια φιλοδοξία εξάλειψης, πρέπει να θεωρείται επιστημονικά ουτοπική, εξ ορισμού του επιστημολογικού εμποδίου ως «επίμονου» που όμως για να μετριαστεί, θα πρέπει να υπάρξουν γνωστικές συγκρούσεις όσο το δυνατόν πιο έντονες και αυτό επιχειρείται εδώ.

3. Πως συνδέεται με προγενέστερες μαθηματικές εμπειρίες;

Τα διαλαμβανόμενα στην παρούσα εργασία, απαιτούν την γνώση της μετατροπής δεκαδικού περιοδικού σε ρητό, που διαπραγματεύεται διδακτέα ύλη της Α΄ Γυμνασίου. Επίσης διαπραγματεύονται αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο, που έχουν ξανασυναντήσει λίγες φορές οι μαθητές πριν.

4. Σε τι αναμένεται να βοηθήσει στη μελλοντική πορεία;

- Στην καλύτερη κατανόηση της αξιωματικής βάσης της Γεωμετρίας σε απτά παραδείγματα.
- Στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας της Σύγκλισης.
- Στην παράθεση απλής απόδειξης εύρεσης του αθροίσματος της Γεωμετρικής Σειράς.
- Σε μια ακόμα ασυνήθη αλλά εξόχως παραστατική αναπαράσταση της έννοιας της Συνάρτησης και μάλιστα 1-1 μεταξύ δύο εννοιολογικά κόντρα συνόλων γι το 1-1 , αφού το ένα είναι πεπερασμένου μήκους και το άλλο απείρου.
- Το 0,999… =1 γνωρίζουμε εμπειρικά ότι παγκοσμίως είναι «δυσαποδέξιμο» αποτέλεσμα, παρ ότι είναι πολλαπλώς αποδείξιμο!

Καλό είναι να επισημαίνεται εμπεδώνεται νωρίς δεδομένου ότι υπάρχουν στοιχειώδεις τρόποι απόδειξης

- Συνειδητοποιούν οι μαθητές με τα όλα παραδείγματα, ότι «τα φαινόμενα απατούν», η «διαίσθηση εξαπατά, αυταπατά» και τελικά ο μόνος σίγουρος μπούσουλας για εύρεση της αληθείας είναι η Μαθηματική απόδειξη, με τι όποιες αβεβαιότητες ανακύψουν γνωστικά πολύ αργότερα.
- Να γοητευθούν από τις ιδιότητες του απείρου για να ασχοληθούν καλύτερα με τα Μαθηματικά.

5. Με ποιες άλλες έννοιες ή προβληματικές καταστάσεις μπορεί να συνδεθεί;

- Η έννοια του ορίου είναι μια έννοια που υπόκειται σε πολλές παρανοήσεις και επιστημολογικά εμπόδια ενώ συνιστά βασικό προαπαιτούμενο για οτιδήποτε στοιχείο του Απειροστικού Λογισμού. Διάφοροι βαθείς διδακτικοί ερευνητές του θέματος όπως οι Sierpinska, Nardi , Tull , Williams, Vinner, αλλά και πολλοί άλλοι, έχουν ασχοληθεί διεξοδικώς με αυτά και ίσως μια οδός για την μελλοντική τους άμβλυνση είναι να μην αποσιωπώνται οι γνωστικές συγκρούσεις που μπορούν να προκύψουν από έννοιες που θεωρούνται «πλήρως κατανοητές» όπως το σύνολο (0,1) που μέσω του αλγεβρικού μοντέλου $0<\chi<1$ θεωρείται απολύτως απλό, ώσπου να τεθεί το θέμα αν έχει μέγιστο στοιχείο αν υπάρχει και δεν μπορούμε να το ανακαλύψουμε ή αν απλώς δεν υπάρχει.
- Υπάρχει διάχυτη η αντίληψη ότι η μόνη πραγματική Γεωμετρία που πράγματι υπάρχει είναι η Ευκλείδεια και μέσω διδακτικής παρέμβασης ιδίως με το τελευταίο μοντέλο της Σφαιρικής - Ελλειπτικής, θεωρούμε ότι αποδυναμώνεται μια γενικώς εδραία κοινή μη επιστημονική αντίληψη-παραθεωρία.
- Για παράδειγμα, το υπό διαπραγμάτευση θέμα 0,999…=1 , απασχολεί όλα τα φόρα που μετέχουν μαθηματικοί είτε φοιτητές μαθηματικών[2]. Στην πλειονότητα το αποτέλεσμα με όποιους τρόπους και να αποδειχθεί γίνεται δύσκολα αποδεκτό μάλλον με κύρια αιτία τις διαφορετικές οπτικές εν δυνάμει και εν ενεργεία απείρου. Με τον Καντόρ, έχει επικρατήσει η έννοια του απείρου ως

---

[2] Ο οποιοσδήποτε αν πληκτρολογήσει στην Google to 0.999…=1 λαμβάνει μια πραγματικά εντυπωσιακή πληθώρα αποτελεσμάτων από όλο τον Κόσμο: https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=0%2C999...%3D1

«ολοκληρωμένο άπειρο» χωρίς να εξαφανιστούν και οι αντιρρήσεις γι αυτό. Η εξήγηση αυτή, συνιστά προσωπική μας γνώμη, από την αποκρυπτογράφηση των συζητήσεων των «αντιρρησιών» στα διάφορα μαθηματικά φόρα. Επί του δέοντος γενέσθαι έχουμε την γνώμη, ότι καλύτερα αυτές οι αλήθειες να εισαχθούν προληπτικά και νωρίς, δεδομένου ότι η μαθηματικής τους διαπραγμάτευση είναι στοιχειώδης.

6. Υπάρχουν εναλλακτικές προσεγγίσεις προς την κατεύθυνση της διαφοροποίησης;

- Η εργασία κατά ομάδες αμβλύνει μέχρι ενός ορίου τις διαφορές των μαθητών στο γνωστικό επίπεδο, αν και οι γνωστικές συγκρούσεις που θα τεθούν έχουν στατιστικά καθολικό χαρακτήρα. Οι διαφορές δεξιότητας στον αλγεβρικό χειρισμό εξακολουθούν να υπάρχουν αν και οι όποιες προσεγγίσεις στο Φ.Ε. γίνονται με τον πιο απλό γνωστό στον συντάκτη υπάρχοντα τρόπο, σε πρώτη προσέγγιση.

7. Μπορεί η παρέμβαση να γίνει σε μικρότερη τάξη; Αν ναι με ποιες αλλαγές;

- Θεωρούμε ότι υπάρχουν γνωστικά αντικείμενα που θεωρούνται υψηλού Πανεπιστημιακού επιπέδου πλην μπορούν να διδαχθούν επιτυχώς π.χ. στην Α΄ Λυκείου, όπως η αριθμησιμότητα των Φυσικών , με τους Ρητούς και η απόδειξη της υπεραριθμησιμότητας του (0,1) με τους ρητούς με εξήγηση του «Διαγωνίου Επιχειρήματος» του Καντόρ, που χρειάζεται την έννοια της 1-1 συνάρτησης και την απαγωγής σε άτοπο.
- Τα περισσότερα πλην των Γεωμετρικών μοντέλων μπορούν να διδαχθούν στην Γ΄ Γυμνασίου και πιο κάτω. Το ότι 0,999…=1, είναι διδακτό από ΣΤ΄ Δημοτικού ενώ το ότι το (0,1) δεν έχει μέγιστο από Γ΄ Γυμνασίου, αρκεί να έχουν προηγηθεί κάποια λίγα θέματα απαγωγής σε άτοπο.

8. Μπορεί η παρέμβαση να γίνει σε μεγαλύτερη τάξη; Αν ναι με τι προσθήκες, μετατοπίσεις;

- Στην Β Λυκείου με διαπραγμάτευση ενός καλύτερου προβλήματος όπως «Σε ένα διαμέρισμα με ύψος 3m τοποθετούμε στο δάπεδό του κύβο ακμής 2m και στην συνέχεια πάνω του νέο κύβο με την μισή

ακμή (1m) κ.ο.κ. Ζητείται μετά από πόσους κύβους «θα πιάσουμε ταβάνι» Τι όγκος θα έχουν τότε οι κύβοι, τι εμβαδόν συνολικής επιφάνειας. [3]

- Γενικότερα, στο τέλος της Εργασίας, έχουμε παραθέσει 10 διερευνητικά προβλήματα γύρω από θέματα οριακών καταστάσεων, όπου λ.χ. τα 7 πρώτα προορίζονται για την Α΄ Λυκείου. Ίσως και άλλα αναλόγως επιπέδου τάξης και ίσως πιο πάνω. Τελειώνουμε με 3 «αθώα» τελευταία ερωτήματα, όπου στο τελευταίο, την 10η κατάσταση προβλήματος, εκ των πραγμάτων, τίθεται θέμα επάρκειας Γεωμετρικού ορισμού για τα ίσα σχήματα. Για να διδαχθεί κάτι από αυτά τα εξαιρετικά προκλητικά, πρώτος ο διδάσκων θα πρέπει να είναι ενημερωμένος κάτι που έχουμε κάνει κυρίως με τις υποσημειώσεις και τα σχόλια και συνδέσμους κάποιων παρεμφερών θεματικών που έχουμε ασχοληθεί κατά καιρούς.

9. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι κατανοητή από τους μαθητές;

Χρησιμοποιούνται αναπόφευκτα εξωμαθηματικές εκφράσεις για εκλαΐκευση του θέματος, πράγμα που είναι δίκοπο μαχαίρι για μόνιμες ανυποψίαστες παρανοήσεις όπως λ.χ. όταν κατασκευάζουμε άπειρα αντικείμενα με άπειρες διαδικασίες (λ.χ. φράκταλ) και βάζουμε και τον χρόνο στα βήματα που συνιστά αντικειμενικό εμπόδιο στην κατασκευή! Η θεώρηση του χρόνου στα μαθηματικά λ.χ. συνιστά ένα πολύ γνωστό γνωστικό εμπόδιο στα Μαθηματικά, αφού «η ακολουθία 1/ν, όλο πλησιάζει το 0, αλλά ποτέ δεν το φθάνει» . Αλλά και αχρονικά να θεωρήσουμε τα Μαθηματικά το συγκεκριμένο εμπόδιο δεν αίρεται εύκολα, αφού υπάρχει και η διπλή οπτική του απείρου ως « εν δυνάμει» και ως «εν ενεργεία», όπου η πρώτη οπτική επιτρέπει την διατήρηση της πλάνης.

10.Ποια είναι τα κριτήρια επιτυχίας/αποτυχίας στην παρέμβαση;

- Η εντύπωση που θα εισπράξει ο καθηγητής κατά την διαπραγμάτευση των θεμάτων, η οποία θα επικυρωθεί με την σωστή τοποθέτηση των μαθητών στα παράδοξα του Ζήνωνα. Η ελάχιστη σωστή αποδεκτή προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί «…ναι έχουμε

[3] Το 2001 είχαμε κάνει μια παρεμφερή εργασία με περίπου την ίδια θεματολογία εδώ: https://www.academia.edu/21246646/27._Η_διδασκαλία_του_απείρου_στην_Μέση_Εκπαίδευση/

άπειρο άθροισμα χρόνων είτε διαστημάτων, αλλά στην περίπτωση αυτή, αυτό το άπειρο άθροισμα πεπερασμένων ποσοτήτων, κάνει πεπερασμένη ποσότητα.

11.Πως η συμμετοχή ενός μαθητή θεωρείται επιτυχής;

- Όταν μπορεί να εξηγήσει έστω και εποπτικά ότι το (0,1) δεν έχει πέρατα , αφού αν υποθέσουμε ως λ.χ. μέγιστο το α , τότε σίγουρα α<1 και ανάμεσα στο 1 και το α υπάρχει ένας άλλος, λ.χ. ο μέσος όρος τους, ο (α+1)/2 που ανήκει στο (0,1) και είναι πιο μεγάλος από αυτόν που θεώρησα τον «μέγιστο» . Το συμπέρασμα «πιο μεγάλος από τον μέγιστο» συνιστά άτοπο, άρα δεν υπάρχει μέγιστος.
- Ότι ο 0,999… δεν είναι ο μέγιστος του συνόλου (0,1) αφού κάνει 1.
- Ότι το (0,1) είναι α+πέραντο, αφού δεν έχει πέρατα, ας είναι πεπερασμένου μήκους , όπως και ο κύκλος είναι ένα απέραντο σχήμα αφού δεν έχει αρχή ούτε τέλος όπως και η ευθεία και το επίπεδο είναι απέραντα σχήματα , όπως και ο κυκλικός δίσκος από τον οποίον λείπει ο κύκλος. (εσωτερικό κυκλικού δίσκου)

12.Αν υπάρξουν μαθητές που δεν τα καταφέρνουν τι θα γίνει;

- Η Παγκόσμια εμπειρία περί το θέμα λέει ότι πάρα πολλοί δυσκολεύονται με αυτά τα θέματα που άπτονται θεμάτων με το άπειρο και την διαίσθηση. Η όποια ενεργός αμφισβήτηση των αποτελεσμάτων, μπορεί να θεωρηθεί εξαιρετικά μεγάλη επιτυχία του μαθήματος όταν υπάρχουν και όποια επιχειρήματα. Κι αυτό, διότι θα έχουμε προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση, της οποίας είμαστε θεατές σαν να έχουμε μπει στο μυαλό του άλλου.
- Γνωρίζουμε, ότι και αυτοί που θα χειριστούν σωστά την όποια στοιχειώδη άλγεβρα που απαιτείται, μπορεί να έχουν πρόβλημα ουσιαστικής κατανόησης σε βάθος. Μπορούμε να γίνουμε πολύ πιο συγκεκριμένοι, με μια βιωματική αναφορά:
  Πριν πάρα πολλά χρόνια, δεκαετίες, ρωτώ έναν καθηγητή που μόλις έχει βγει από την τάξη, στο διάλειμμα : «Τι κάνατε;» Και μου είπε το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου με λόγο ½ και πρώτο όρο το1. Εκεί ακριβώς του έθεσα το πρόβλημα : «Αν προσθέσω άπειρες στο πλήθος θετικές ποσότητες, προσοχή! ….άπειρες θετικές ποσότητες, καμία μηδέν, καμία αρνητική, τι αποτέλεσμα θα πάρω;» Και εισέπραξα την απάντηση: «Άπειρο Φυσικά!...» Η γνώση και των συγκυριών που πήρα αυτή την

απάντηση με προβλημάτισε πολύ για την αντίληψη του όποιου βάθους των μαθηματικών εννοιών που χειριζόμαστε…

13. Υπάρχει πρόβλεψη για αξιοποίηση "ατελών" προσεγγίσεων των μαθητών;

Κατά το δυνατόν έχουν προβλεφθεί οι όποιες αναμενόμενες απαντήσεις των μαθητών.

14. Υπάρχουν στοιχεία που προέκυψαν από την παρέμβαση και θα μας είναι χρήσιμα σε μελλοντικές;

Πάντα ο καθηγητής σε τέτοιου είδους παρεμβάσεις διδακτικές εισπράττει προσεκτικά την ανάδραση των μαθητών και είτε προβαίνει σε διορθωτικές κινήσεις είτε ακόμα και δομικές. Πάντα πειραματίζεται για το καλύτερο.

15. Σε ποιες γενικές κατευθύνσεις μαθηματικού γραμματισμού μπορεί να ενταχθεί η παρέμβαση;

Οι δραστηριότητες που διαπραγματεύονται στο παρόν σενάριο, εντάσσονται στις αρχές της ενεργού μάθησης και της προγραμματισμένης δραστηριότητας με συγκεκριμένο στόχο, να προκαλέσει μεγάλη γνωστική σύγκρουση και να προκύψει κατά Πιαζέ σύγκρουση και προσαρμογή, μέσω αφομοίωσης -συμμόρφωσης εξισορρόπησης. Επίσης η διαπραγμάτευση γίνεται μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλήματος με σκοπό την προαγωγή της νοητικής «ευκινησίας».

Το πλαίσιο της ανάπτυξης του σεναρίου είναι κατά βάση Αλγεβρικό, Γεωμετρικό, Λογικό, Απειροστικό, Συνολοθεωρητικό, φιλοσοφικο-μαθηματικό (αναγκαστικά) με μικρές προεκτάσεις σε γνωστές βασικές έννοιες Φυσικής και Χημείας.

Το πλαίσιο, περιλαμβάνει μαθηματικά καθημερινά αντικείμενα «καθημερινής χρήσης» και των απρόσμενων προεκτάσεων και σημειολογιών που κρύβουν την γνωστική σύγκρουση που προκαλείται μόλις αναδειχθούν αυτές οι ειδικές σημειολογίες, σημασίες τους που δεν γίνονται εκ πρώτης όψεως αντιληπτές. Ουσιαστικά εκεί έγκειται όλο το ενδιαφέρον της δραστηριότητας.

Το ειδικό περιεχόμενο της δραστηριότητας είναι όπως είπαμε «διακλαδικό» στα μαθηματικά με μικρές φυσικοχημικές γνώσεις.

Διαπραγματεύονται έννοιες όπως ο χώρος, το σχήμα και η ποσότητα, με εκκίνηση από ένα πρόβλημα, η επίλυση του οποίου έχει προεκτάσεις και αναπαραστάσεις και σε άλλους κλάδους.

Κυρίως η διαπραγμάτευση που γίνεται, προάγει την Μαθηματική σκέψη την διατύπωση συλλογισμών και την ανάπτυξη επιχειρημάτων, σε πλαίσιο γραπτής και λεκτικής επικοινωνίας, με βάση τα θέματα μαθηματικού περιεχομένου που διαπραγματεύεται το σενάριο.

Οι μαθητές, καλούνται να αναπτύξουν σε ελάχιστο βαθμό δέσμες ενεργειών **αναπαραγωγής** εννοιών και να εκτελέσουν δέσμες **συνδέσεων** εννοιών Άλγεβρας, Γεωμετρίας και Ανάλυσης με εφαρμογή και στον Μαθηματικό φιλοσοφικό στοχασμό με αναμενόμενη βελτίωση στην ικανότητα αναστοχασμού που θα αποτιμηθεί κατά ένα μέρος στην ανταπόκριση επίλυσης των προβλημάτων που θα τεθούν ως εργασία κατ΄οίκον.

Συνιστώμενη προαπαιτούμενη γνώση :

$Αν\ \alpha<\beta,\ τότε\ \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ (2) (η μέση τιμή δύο αριθμών, είναι στην μέση τους, με την έννοια μέση τους να ταυτίζεται με την μέση του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζουν στην ευθεία των Πραγματικών Αριθμών.

Η (2) είναι ειδική περίπτωση της ακόμα γενικότερης του «σταθμικού μέσου όρου» όπου δηλαδή ανάλογα «με την βαρύτητα» που δίνουμε στα α και β ο Μ.Ο. είναι πιο κοντά στο α ή πιο κοντά στο β

$$Αν\ \alpha<\beta\ και\ \mu,\nu\ θετικοί, τότε\ \alpha<\frac{\mu\cdot\alpha+\nu\cdot\beta}{\mu+\nu}<\beta$$

Κάποιοι μαθητές που έχουν μια άλλη αλγεβρο-γεωμετρική αίσθηση, για να βρουν το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος-συνόλου [α,β], λένε: «Βρίσκω το μήκος του [α,β] που είναι β-α (χωρίς να το προσεγγίζουν κατ΄ανάγκη με το γενικότερο |β-α|) μετά βρίσκω το μισό του, δηλ. το $\frac{\beta-\alpha}{2}$ και μετά στο α, προσθέτω το $\frac{\beta-\alpha}{2}$ και βρίσκω την μέση του [α,β] .

Συνοπτική παρουσίαση του Σεναρίου προστιθέμενη αξία και επεκτασιμότητα :

Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες και ο καθηγητής επιβλέπει κρατώντας τον χρόνο και δίνεις διευκρινήσεις είτε κάνοντας ευρετικές νύξεις. Η εισαγωγή γίνεται με ένα πρόβλημα προκλητικό που αναμένεται να επιφέρει συζητήσεις για την διαπραγμάτευση της λύσης του. Στην πορεία του Φύλλου Εργασίας αναδεικνύονται οι τεθέντες στόχοι-σκοποί. Η όποια πρωτοτυπία του σεναρίου, έγκειται στην διαθεματική προσέγγιση του αντικειμένου, αλλά και στην ανάδειξη του γεγονότος ότι το (0,1) δεν έχει άκρα κάτι που δεν υποδηλώνεται ούτε εμμέσως σε οποιοδήποτε σημείο της ύλης Γυμνασίου -Λυκείου (ή να περνά ασχολίαστο, χωρίς καμία πρόσληψη από τους μαθητές όπου ίσως ως πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού καταπλήσσονται σφόδρα με την ανακάλυψη ότι 0,999...=1 και «δεν την δέχονται» έστω και αποδεδειγμένη, κάτι που είναι Παγκόσμιο φαινόμενο) Εξαιρετικά συναφής είναι και η απάντηση στο ερώτημα «Αν πάρουμε άπειρους στο πλήθος θετικούς αριθμούς (κανένας μηδέν, κανένας αρνητικός) και τους αθροίσουμε , τι αποτέλεσμα θα πάρουμε; Άπειρο ή πεπερασμένο; Η απάντηση και από φοιτητές είναι «*προφανώς άπειρο*» ας έχουν διδαχθεί από το Δημοτικό ότι 0,333333....=1/3 και από Β΄ Λυκείου το ότι $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1$. Το μοντέλο του λάθους είναι ισχυρότατο καθώς ουσιαστικά εδράζεται στο «απολύτως φυσιολογικό και εύλογο» αξίωμα των Αρχιμήδους -Ευδόξου που ισοδυνάμως λέει «ότι αν έχουμε ένα απειροελάχιστο μέγεθος, μπορούμε να το πολλαπλασιάσουμε με έναν Φυσικό αριθμό αρκούντως μεγάλο και να ξεπεράσουμε κάθε γνωστή τεράστια ποσότητα που έχουμε θέσει ως όριο.» Δηλ. Αν α, β $\in \mathbb{R}$ και α<β, $\exists \nu \in \mathbb{N}: \nu\alpha > \beta$

Η συνειδητοποίηση των παραπάνω είναι μια καλή γέφυρα σε μαθητές εξ απαλών ονύχων να εξοικειωθούν σε πρωτόλειο βαθμό με έννοιες Γ΄ Λυκείου , μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και με την τοπολογία του $\mathbb{R}$ και να μην πανικοβάλλονται χωρίς Γεωμετρική εποπτεία ακούγοντας για *«ελάχιστα άνω φράγματα συνόλου που δεν ανήκουν στο σύνολο»* που «περιέργως» λέγονται και «supremum» κ.ο.κ.

Οι ειδικότερες οδηγίες και ενδεχόμενες τροπές του σεναρίου παρουσιάζονται και εντός του επομένου φύλλου Εργασίας. Το φύλλο εργασίας, δεν είναι απαραίτητο να έχει εκτυπωμένα αναγκαστικά όλα τα ερωτήματα, αφού ενίοτε η διατύπωση ερωτημάτων επί συναφούς θέματος

προκαταλαμβάνει απαντήσεις. Σύντομα ερωτήματα τα αντιγράφουν από προβολέα στο ΦΕ και τα απαντούν.

Στο ΦΕ περιλαμβάνουμε όλες τις κατά το δυνατόν εικαζόμενες δυνατές τροπές που μπορεί να πάρει το μάθημα. Επειδή υπάρχει ο παράγοντας χρόνος, κάποιες τροπές σεναριακές δύνανται να επαφεθούν ως δραστηριότητες σπίτι, όπως λ.χ. το «θεωρητικό ερώτημα» για πόσο κοστίζει ένα κιλό ζάχαρης μείον το βάρος ενός μορίου ζάχαρης, αν το κιλό κοστίζει 1€, που συνιστά ένα «πρακτικό άνω φράγμα» στην ελάχιστη αξία σε ζάχαρη .

Φύλλο Εργασίας:



1. Ο Διάσημος Κροίσος

Ένας σύγχρονος διάσημος τσιγκούνης, αλλά «Κροίσος», προκειμένου να συζητηθεί το όνομά του δωρεάν, έθεσε δημοσίως το εξής πρόβλημα:

«Όποιος μου δώσει την μεγαλύτερη αξία που υπάρχει κάτω από 1€ , του χαρίζω το μισό της αμύθητης περιουσίας μου!»

Πώς είναι τόσο σίγουρος ότι κανείς δεν θα του λύσει το πρόβλημα δεδομένης της παθολογικής του τσιγκουνιάς; Μήπως εσείς έχετε μια απάντηση στο πρόβλημα;

Απάντηση:____
____

(Ο καθηγητής προτρέπει τις ομάδες να γράψουν τις απαντήσεις τους)

Διαπραγμάτευση πιθανών απαντήσεων μεταξύ μαθητών αναλόγως και των πιθανών απαντήσεων:

Α) 0,99€ . Είναι όντως το μεγαλύτερο νομισματικό ποσό κάτω από 1€ που μπορούμε να επιτύχουμε με κυκλοφορούσες υποδιαιρέσεις, αλλά το πρόβλημα του Κροίσου έχει την μαγική λεξούλα «αξία» και όχι «αξία σε

νομίσματα» Για παράδειγμα όλοι ξέρουμε ότι υπάρχει και αξία 0,999€. Παράδειγμα : «Χρησιμοποιώ μια υπηρεσία βιντεοπαιγνιδιού που χρεώνεται με το δευτερόλεπτο και κοστίζει 1€ τα 1000sec. Αν τελειώσω στα 999sec πρέπει να πληρώσω 0,999€, άρα έχουμε μεγαλύτερη αξία!

Αν έχω 1Kgr ζάχαρης $C_{12}H_{22}O_{11}$ *που υποθέτω ότι το έχω ζυγίσει ακριβώς (δεν γίνεται, αλλά το υποθέτουμε ότι γίνεται) Και αφαιρέσω την ελάχιστη ποσότητα ζάχαρης που μπορώ να αφαιρέσω και είναι (;) ….το ένα μόριο, θα βρω κάτι λιγότερο και μια αξία 0,999…με 25 εννιάρια (Γιατί;)*

0,6023X10^{24} *μόρια ζάχαρης ζυγίζουν περίπου 342,3 gr*

X; 1000gr

Μόλις βρω το χ, θα έχω την αναλογία (ή «απλή μέθοδο των τριών»)

$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{z}$ *απ ΄όπου θα βρω και το z.*

Β) Η όποια αξία αναλόγως χρόνου που είναι συνεχές μέγεθος[4] *μπορεί να δώσει απεριόριστα εννιάρια. Η όποια αξία αναλόγως υλικού, δίνει πεπερασμένα εννιάρια, καθώς υπάρχει έσχατο ποσοτικό όριο υλικής ουσίας, το μόριο, καθώς είναι το ελάχιστο όριο που διατηρεί τις ιδιότητες του υλικού από το οποίο προέρχεται.*

Γ) η θεώρηση του 0,999…999 με ν εννιάρια επάγει το επιχείρημα «πες όσα εννιάρια θες! Όσα πεις εσύ, εγώ θα λέω και …ένα παραπάνω!» (που οδηγεί σε μεγαλύτερο αριθμό πριν το 1.

Η θεώρηση του 0,999… με άπειρα εννιάρια είναι η αναπόφευκτη κατάληξη.

Εδώ ο καθηγητής θέτει επί πίνακος σε όλες της ομάδες (δεν υπάρχει στο Φ.Ε.) την άσκηση :

---

[4] Στην Φυσική υπάρχει και η άποψη του κβαντισμένου χρόνου, του «διακριτού» χρόνου, δηλ. των «διακριτών χρονικών μονάδων» όπως συμβαίνει με τους ακεραίους όπου ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους, δεν υπάρχει άλλος ακέραιος. Στα μαθηματικά πριν την περίφημη έννοια του συνεχούς, έχουμε την έννοια του «πυκνού συνόλου» όπως το Q , όπου ανάμεσα σε δύο ρητούς οσοδήποτε κοντά υπάρχει ενδιάμεσος και τελικά άπειροι άλλοι, αριθμήσιμοι (Άλεφ μηδέν $\aleph_0$). Με το συνεχές που έχει ως ιδιότητα το $\mathbb{R}$, ανάμεσα σε δύο οσοδήποτε κοντά πραγματικούς, υπάρχει ενδιάμεσος και τελικά άπειροι άλλοι υπεραριθμήσιμοι.(Άλεφ ένα $\aleph_1$) όπου μεταξύ υπεραριθμήσιμου και αριθμήσιμου απείρου υπάρχει η γνήσια ανισότητα $2^{\aleph_0}=\aleph_1>\aleph_0$ όπως απέδειξε ο Cantor με το «διαγώνιό του επιχείρημα» που στην ουσία ήταν ένα νέο αξίωμα των μαθηματικών, το «αξίωμα της επιλογής»

2. Μετατροπή του ρητού περιοδικού 0,999… σε ρητό

«Να μετατρέψετε τον δεκαδικό περιοδικό αριθμό 0,999… (άπειρα εννιάρια) σε ρητό, όπως έχετε μάθει στην Α΄ Γυμνασίου»[5]

Το αποτέλεσμα 0,999…=1 οδηγεί σε αποτυχία, αφού «αναζητούμε την μεγαλύτερη αξία μικρότερη από 1.»[6]

Εκτός από τον τρόπο που υπάρχει στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, δηλ.

$$\chi = 0,99999999......$$

$$10\chi = 9,999999........$$

$$10\chi - \chi = 9,0000000....$$

$$9\chi = 9$$

$$\chi = \frac{9}{9}$$

$$\chi = 1$$

(όπου σε αυτόν αναμένεται να καταλήξουν οι μαθητές) εναλλακτικά υπάρχουν και οι θεωρήσεις: [7]

$$1 = 3\cdot\frac{1}{3} = 3\cdot 0,333... = 0,999... \text{ ή } 1 = \frac{9}{9} = 9\cdot\frac{1}{9} = 9\cdot 0,111... = 0,999...$$

Συνοψίζει ο καθηγητής μετά την διαπραγμάτευση του αποτελέσματος:

«Άρα δεν είναι το 0,999… , αφού κάνει 1 και εμείς θέλουμε αξία μικρότερη από 1….

---

[5] http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-A200/426/2866,10953/

[6] Το ερώτημα λογικά είναι δόκιμο, αφού λ.χ. στα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ «ο μεγαλύτερος φυσικός κάτω από 10 είναι το 9» Τα πράγματα αλλάζουν άρδην στα $\mathbb{Q},\mathbb{R}$.

[7] Το θέμα, όσο κι αν φαίνεται απλοϊκό, είναι εξαιρετικά σοβαρό παγκοσμίως. Στον επόμενο σύνδεσμο είναι η παράθεση από Βικιπαίδεια για το θέμα: https://el.wikipedia.org/wiki/0,999... Ενώ στον επόμενο μαζεμένες κάποιες αποδείξεις , αφού το αποτέλεσμα δεν είναι τόσο «αποδεκτό» και παρά τις αποδείξεις! https://en.calameo.com/books/004875725da3ca3518694

3. Το (0,1) δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Μήπως, απλώς το (0,1) δεν έχει απλώς μέγιστο στοιχείο γι αυτό ο τσιγκούνης Κροίσος φαίνεται τόσο γαλαντόμος με ένα μαθηματικό πρόβλημα που μάλλον δεν λύνεται αφού απλώς δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο;

Τι λέτε, τι νομίζετε;…….(Διαπραγματεύονται οι απαντήσεις για 2 λεπτά το πολύ.)

Υπάρχει τρόπος με την απαγωγή σε άτοπο να αποδείξουμε ότι δεν έχει μέγιστο στοιχείο;

(Διαπραγματεύεται την διατύπωση, δηλ. «θα υποθέσουμε ότι έχει ένα μέγιστο, το α, για το οποίο θα ισχύει α<1 (δεν μπορεί να είναι το 1) και θα καταλήξουμε σε άτοπο»)

Απόδειξη με γεωμετρική εποπτεία *Ανάμεσα στο α και στο 1, στην μέση ακριβώς, υπάρχει ο «μέσος όρος» τους το* $\frac{a+1}{2}$ *. Όμως* $\alpha<\frac{a+1}{2}<1$ *, άτοπο, διότι υποθέσαμε το α ως μέγιστο και μας βγήκε ένα άλλο «πιο μέγιστο» δεδομένου ότι το μέγιστο -όταν υπάρχει- είναι μοναδικό.*

Αποδείξτε το τώρα στο χαρτί, όπως το είχαμε αποδείξει σε προηγούμενο μάθημα:

Ένα τρόπος εργασίας των μαθητών είναι ο εξής:

Μάθαμε, ότι $\text{Αν}\ \alpha<\beta,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ για β=1

Έχω $\text{Αν}\ \alpha<1,\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha<\frac{\alpha+1}{2}<1$, δηλ. βρήκαμε ένα νέο μέγιστο, το $\frac{\alpha+1}{2}$, άτοπο!

Μπορούν να δουλέψουν και με πιο αναλυτικά ως εξής :

$$\alpha<1 \Rightarrow \alpha+\alpha<\alpha+1 \Rightarrow 2\alpha<\alpha+1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\alpha<\frac{1}{2}\cdot(\alpha+1) \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+1}{2}$$

Επίσης:

$$\alpha < 1 \Rightarrow \alpha + 1 < 1 + 1 \Rightarrow \alpha + 1 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(\alpha+1) < \frac{1}{2}\cdot 2 \Rightarrow \frac{\alpha+1}{2} < 1$$

Μπορούν να δουλέψουν και αναλυτικά ως εξής:

Για να αποδείξουμε ότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$, αρκεί να αποδείξουμε

$$(2\alpha < 2\frac{\alpha+\beta}{2} < 2)\beta \; ή \; (2\alpha < \alpha+\beta < 2\beta)$$

$$ή \; (2\alpha < \alpha+\beta \;\; και \;\; \alpha+\beta < 2\beta) \; ή \; (\not{2}\alpha < \not{\alpha}+\beta \;\; και \;\; \alpha+\not{\beta} < \not{2}\beta)$$

που ισχύει και άρα τελείωσε και η απόδειξη.

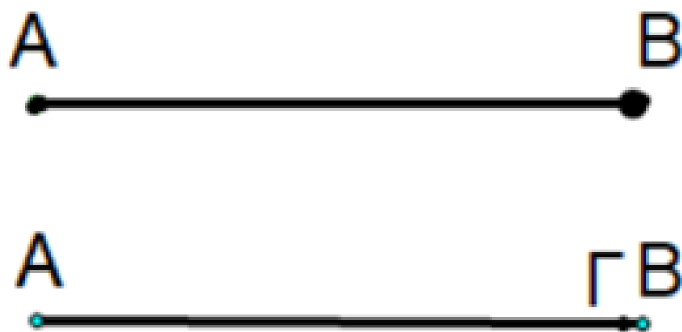
Τελικά:

Το (0,1) δεν έχει μέγιστο στοιχείο και με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι δεν έχει ούτε και ελάχιστο.

Θεωρούμε, ότι ο καθηγητής μπορεί να κάνει την προσέγγιση με την μέση τιμή και με γλώσσα Αλγεβρική που ταυτοχρόνως εποπτική με το παρακάτω σχήμα, στο οποίο θα κάνει και την καθαρά γεωμετρική προσέγγιση . Η λογική «Υπάρχει η μέση, αλλά και η μέση της μέσης κ.ο.κ. προλειαίνει και τις επίμενες παρεμβάσεις.

4. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ χωρίς τα Α και Β, δεν έχει άκρα (Απόδειξη με απλά επιχειρήματα, Γεωμετρικά)

Έχουμε το ΑΒ με τα άκρα του και τα οποία εξαιρούμε στο κάτω σχήμα, όπου τα Α και Β δεν υπάρχουν απλώς στην θέση τους βάζουμε δύο τρυπούλες για να υποδηλώσουμε ότι δεν υπάρχουν αυτά τα σημεία.



Ας υποθέσουμε ότι στο μέρος κοντά στο Β, υπάρχει κάποιο άκρον το Γ. Το Γ, δεν ταυτίζεται με το Β. Ανάμεσα στο Γ και στο Β, λέει ένα[8] αξίωμα της Γεωμετρίας, υπάρχει ένα άλλο σημείο Μ, ανήκον στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ και είναι διαφορετικό και από το Γ και από το Β. Έτσι ενώ υποθέσαμε ως Γ νέο άκρο αποδείξαμε ότι υπάρχει και ένα άλλο Μ, πιο κοντά στο κενό του Β, που δεν είναι το Β, άτοπο!

5. Το ανέκδοτο του σχοινιού με την κομμένη άκρη

Ανακοινώνει ο καθηγητής:

«Θυμήθηκα ένα μικρό σύντομο ανέκδοτο πάνω στο αποτέλεσμα:

Σε ένα ψυχιατρικό ίδρυμα , ένας τρόφιμος, βλέπει έναν άλλον να προσπαθεί να ξεμπλέξει ένα κουβάρι σχοινί που έχει στα χέρια του και διαμείβεται ο ακόλουθος διάλογος:

-Να το ξεμπλέξεις προσπαθείς;

*-Όχι! ....Αυτό είναι δύσκολο! ....**Μόνο την άκρη του κουβαριού προσπαθώ να βρω!***

-Λυπάμαι, αλλά δεν θα την βρεις ποτέ, διότι την έχω….κόψει!»

…………………………………………………………………………………………

[8] Δεν είναι ακριβώς ένα αλλά τρία σε μια ειδική ομάδα αξιωμάτων που διατύπωσε ο Χίλμπερτ έχοντας την φιλοδοξία να μην υπάρχει απολύτως κανένα κενό στην Ευκλείδεια Γεωμετρία:

- (II_1) Από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ένα και μόνον ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.
- (II_2) Για οποιαδήποτε δύο σημεία Α και Γ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Β στην ευθεία ΑΓ τέτοιο, ώστε το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ του Α και του Β.
- (II_3) Για οποιαδήποτε τρία σημεία μιας ευθείας υπάρχει όχι περισσότερο από ένα σημείο που βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων. Η σχέση του «μεταξύ» για σημεία σε μια ευθεία μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του ευθύγραμμου τμήματος.

Περισσότερα εδώ: https://el.wikipedia.org/wiki/Αξιώματα_Χίλμπερτ/

«Πού έγκειται το αστείο παιδιά και τι σχέση έχει με το αποτέλεσμα που βρήκαμε;»

Γράψτε την απάντησή σας στο ΦΕ.

Γίνεται διαπραγμάτευση και ανακοίνωση του τελικού αποτελέσματος ότι δηλ. «Αν κόψω τις άκρες του [0,1] και κατασκευάσω το (0,1) αυτό κατά πολύ περίεργο τρόπο, αλλά μαθηματικά αποδεικτικό, παύει να έχει άκρα , έτσι όπως είναι το κόντρα φυσικό μοντέλο που έχουν στον νου τους όλοι οι άνθρωποι»

………………………………………………………………………………

6. Γιατί το (0,1) είναι απειροσύνολο;

Γράψτε το ερώτημα:

«Γιατί το (0,1) είναι ένα απειροσύνολο, δηλ. έχει άπειρα στο πλήθος στοιχεία;» ….Γράψτε έναν τρόπο που μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε γι αυτό…

Μερικές αναμενόμενες απαντήσεις:

1. Υπάρχει το 0,9 το 0,99 το 0,999 το 0,9999 το …το $\underbrace{0,99999...9}_{\nu\ \text{το πλήθος εννιάρια}}$ … με το ν «όσο μεγάλο θέλουμε» [9]
2. Αν υπάρξει εμπλοκή στην εξήγηση, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία 0,3 0,33 0,333 κ.ο.κ. που είναι άπειρη και ο «απειροστός» της όρος είναι το 1/3 εντός του (0,1)

[9] . Εδώ όμως μπορεί κάποιος να πει ότι είναι πάντα πεπερασμένοι αυτοί οι αριθμοί, αφού οι άπειροι κάνουν το 1 που είναι εκτός του συνόλου! Η εξήγηση εδώ έχει να κάνει με τις δύο θεωρήσεις του απείρου ως «εν δυνάμει» -δυνητικό άπειρο και το «ενεργεία» . Ως «δυνάμει άπειρο» εννοούμε λ.χ. στους Φυσικούς την δυνατότητα για κάθε φυσικό να φανταζόμαστε έναν μεγαλύτερο , ενώ ως «ενεργεία άπειρο» πάλι για τους Φυσικούς εννοούμε το $\mathbb{N}$ ως «ολοκληρωμένο άπειρο» όπως το εννοεί και ο Cantor και όπως δεν το ήθελε ο Αριστοτέλης. Οι κονταροκτυπούμενες οπτικές έχουν παραγάγει την γνωστή παρανόηση ότι λ.χ. η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ πλησιάζει το 0 καθώς $\nu \to \infty$, αλλά ποτέ δεν το φθάνει και η «άλλη» οπτική, του «ολοκληρωμένου» απείρου («ενεργεία») ότι γίνεται 0, ας μην μηδενίζεται ποτέ το κλάσμα $\frac{1}{\nu}$.

3. Για κάθε δεκαδικό στο (0,1) λ.χ. τον 0,587 σχηματίζω «πολύ κοντά του» άπειρους άλλους : 0,5869 -0,58699-0,586999-0,5869999… και μετά από άπειρα βήματα φθάνουν στον 0,587
4. Όλοι οι όροι της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ είναι άπειροι και ευρίσκονται εντός του (0,1)[10]
5. Με τον μέσο όρο: Υπάρχει το ½ στην μέση. Έχουμε δύο τμήματα που χωρίζουμε ξανά στην μέση. Έχουμε τώρα 4 που χωρίζουμε ξανά στην μέση . Έχουμε 8 που χωρίζουμε στην μέση. Έχουμε 16 που χωρίζουμε στην μέση κ.ο.κ.
6. Και χωρίς την απαίτηση ο χωρισμός να γίνεται στη μέση. [11]

7. Είναι το (0,1) εκτός από άπειρο και «απέραντο σύνολο;»

Να διαπραγματευθούμε το ερώτημα: «Όπως διαπιστώσαμε, το (0,1) δεν έχει ούτε αρχή, ούτε τέλος. Μπορούμε να πούμε ότι το (0,1) είναι ένα **απέραντο** σύνολο;….Μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε με την λέξη «απέραντο»;

Γράψτε την γνώμη σας στο χαρτί και όποιο επιχείρημα έχετε να υποστηρίξετε την άποψή σας

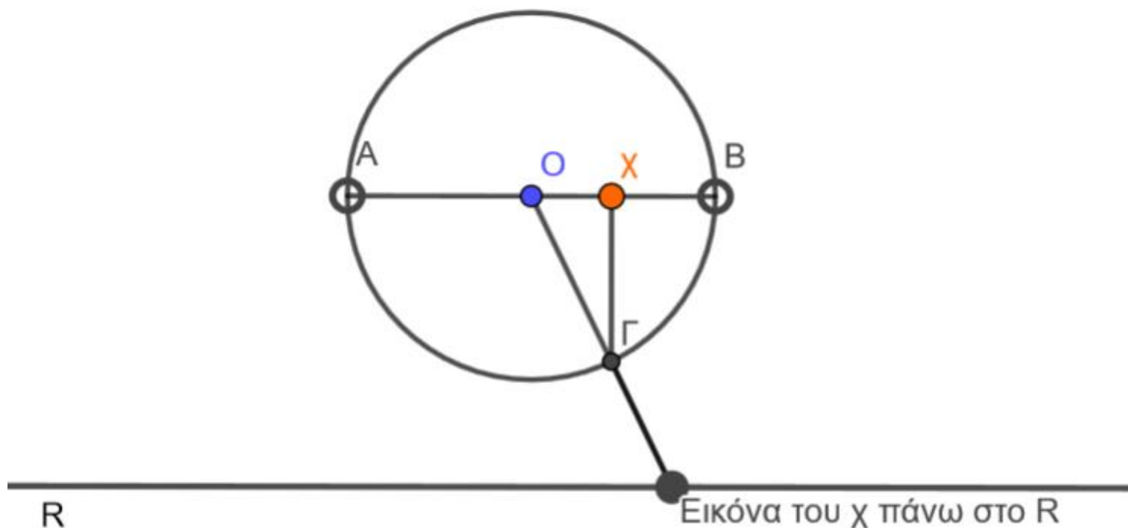
Η διαπραγμάτευση γίνεται κυρίως με την έννοια της λέξης «απέραντο=το μη έχον πέρας/πέρατα. Η Ευθεία είναι απέραντη, γιατί δεν έχει πέρατα, ούτε αρχή, ούτε τέλος. Η ημιευθεία είναι απέραντη διότι αν και έχει αρχή, δεν έχει τέλος, ενώ το (0,1) αποδείξαμε ότι δεν έχει αρχή ούτε τέλος, είναι «α-πέραντο» ενώ έχει πεπερασμένο μήκος. Επίσης αν θεωρήσουμε την ημιευθεία $(0,+\infty)$ ούτε αυτή έχει αρχή και τέλος ενώ η $[0,+\infty)$ έχει μεν αρχή, αλλά όχι τέλος

[10] Εδώ το 0 δεν θεωρείται ποτέ ως άπειρο όριο του $\frac{1}{\nu}$, διότι το κλάσμα δεν μηδενίζεται ποτέ, σε αντίθεση με την σειρά (ακολουθία) 0,9999… που επ άπειρον εννοείται ως 1.

[11] Πάμε πιο κοντά στην μη ρητώς διατυπωμένη έννοια του πυκνού συνόλου.

8. Μήπως το (0,1) είναι «ίσο» με το $(-\infty,+\infty)$; (Αυτό …πια!)

Θα δούμε όλοι μαζί τώρα ένα σχήμα Γεωμετρίας και την εκφώνηση που υπάρχει στο ΦΕ σας: (Εξηγεί όμως το σχήμα στον διαδραστικό πίνακα ή στην προβολή από Η/Υ)



«Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από το οποίο σχηματικά λείπουν τα άκρα του Α και Β και τα οποία συμβατικά έχουμε σχεδιάσει με δύο κυκλάκια, αν και τα σημεία είναι αδιάστατα. Το ΑΒ είναι παράλληλο στην ευθεία R. Το ΑΒ θα μπορούσε να είναι το (0,1), το R η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Το χ, ένας οποιοσδήποτε αριθμός ενδιάμεσος στο (0,1). Και η «εικόνα του χ πάνω στο R» ένας αντιστοιχιζόμενος αριθμός με τον τρόπο που περιγράφουμε ως ακολούθως:

Από το «κάθε χ», φέρνω κάθετη στο κάτω ημικύκλιο που το τέμνει σε ένα μόνο σημείο Γ. Ορίζεται η μοναδική ακτίνα ΟΓ, της οποίας η προέκταση τέμνει την απέραντη ευθεία σε μία «εικόνα του χ (=αντίστοιχο σημείο) πάνω στο R»

Αντίστροφα: (Βλέπουμε το σχήμα κατασκευαστικά αντίστροφα)

Όπως έχουμε μία «εικόνα του Χ πάνω στο R» την συνδέουμε με το κέντρο του κύκλου, που τέμνει τον κύκλο σε μοναδικό σημείο Γ. Από το Γ, φέρουμε την προβολή του Γ πάνω στην ΑΒ που είναι το μοναδικό χ.

Στην παραπάνω κατασκευή :

Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο-αριθμό χ στο ΑΒ και μέσω μιας γεωμετρικής κατασκευαστικής διαδικασίας το αντιστοιχίζουμε σε μια εικόνα του στο R. Μετά, αντιστρόφως, αλλάζουμε την κατασκευή σαν να φτιάχνουμε το ίδιο σχήμα με άλλο τρόπο και παίρνουμε μια τυχαία «εικόνα στο R» και κατασκευαστικά την αντιστοιχίζουμε σε μοναδικό χ στο ΑΒ.

Δηλαδή: Πήραμε έναν αριθμό χ του ΑΒ και τον αντιστοιχίσαμε σε έναν άλλον αρισθμό («εικόνα»)στο R. Η διαδικασία αυτή λέγεται στα Μαθηματικά ……………………………………………………..

Μετά, αντιστρόφως, πήραμε έναν αριθμό στο R και τον αντιστοιχίσαμε σε έναν αριθμό στο ΑΒ. Η διαδικασία αυτή στα Μαθηματικά λέγεται……………………………………………………

Κοιτάξτε τώρα το ίδιο σχήμα σε κίνηση, όπου η μεταβλητή χ διατρέχει το ΑΒ και η εικόνα του χ διατρέχει το R (Το σχήμα σε δυναμικό σύνδεσμο Geogebra εδώ!)

Ερώτηση: «Όταν το χ πάει πάνω στα Α είτε Β , ποία είναι η εικόνα του στο R και γιατί;

Απάντηση:……………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

Ερώτηση: «Μπορεί να υποστηρίζει κάποιος σοβαρά, ότι το σύνολο (0,1) έχει το ίδιο ακριβώς άπειρο πλήθος στοιχείων με το R, παρ΄ότι όλοι γνωρίζουμε ότι $(0,1) \subset \mathbb{R}$ και μήκος του (0,1) μία μονάδα, ενώ το μήκος του R άπειρο ; Ποίο το επιχείρημα;

Απάντηση:

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

…………………………………………………………………

9. Το άθροισμα των άπειρων στο πλήθος πεπερασμένων ποσοτήτων

Ερώτηση: Αν πάρω άπειρα στο πλήθος ευθύγραμμα τμήματα, έχω άπειρο χρόνο [12] και τα βάλω το ένα δίπλα στο άλλο, διαδοχικά όπως λέμε……Τι θα πάρω ως αποτέλεσμα;

- Ευθύγραμμο τμήμα;
- Ημιευθεία ή…
- Ευθεία;

(Εξηγείστε την διαδικασία)

Απάντηση:………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

Αναμενόμενες απαντήσεις :

- Ημιευθεία, αφού ξεκινώ από κάπου και συνέχεια δεξιά προσθέτω άπειρα ευθύγραμμα τμήματα και αυτή η απειρία οδηγεί σε απεριόριστο μήκος δεξιά, άρα ημιευθεία.
- Ευθεία , αφού βάζω δεξιά και αριστερά άπειρα ευθύγραμμα τμήματα και άρα έχω απεραντοσύνη εκατέρωθεν του αρχικού τμήματος, άρα ευθεία.
- Το ευθύγραμμο τμήμα, είναι μια απάντηση που είναι εξαιρετικά απίθανο να δώσει κάποιος μαθητής, παρ΄ ότι το μοντέλο το έχουν

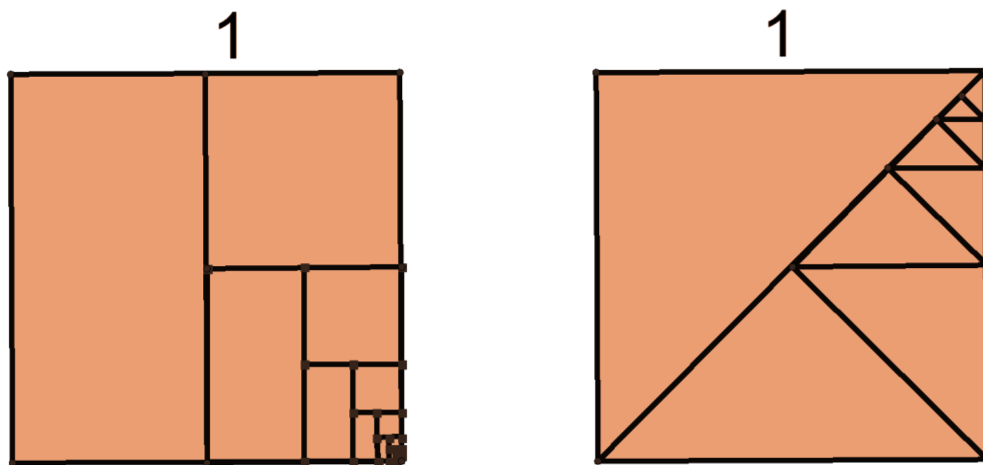
[12] . Εδώ για να κάνουμε πιο ζωντανό το παράδειγμα, μετερχόμαστε της έννοιας της άπειρης διαδικασίας, όμως κανείς ποτέ δεν έχει άπειρο χρόνο για να κάνει κάτι. Ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι έχει, η εργασία του δεν θα τελειώσει ποτέ, οπότε δεν έχει απολύτως κανένα νόημα τι θα καταφέρει στο τέλος της άπειρης χρονικά εργασίας του. Στην Πληροφορική το έχουν λύσει με τον ορισμό του Αλγορίθμου, «ως μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος.» Οι μαθηματικοί από την άλλη θεωρούν τα Μαθηματικά αχρονικά, αλλά οι σπουδαστές των Μαθηματικών, φτιάχνουν όλοι μοντέλα με χρόνο λ.χ. Σειρών, τα μερικά αθροίσματα των *οποίων «όλο και αυξάνονται και **ποτέ** δεν φθάνουν το όριο της Σειράς»* που είναι μια κύρια πηγή επιστημολογικών, διδακτικών εμποδίων του Απειροστικού Λογισμού.

δει χρονικά πριν λίγο με μαθηματικά Δημοτικού, αλλά γνωρίζουμε εμπειρικώς ότι δεν το έχουν κατανοήσει σε απαιτούμενο βάθος:

Η παράσταση $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\cdots$ είναι άπειρα κλάσματα του ευθυγράμμου τμήματος που έχει μήκος 1, τα οποία όλα μαζί, άπειρα στο πλήθος, κάνουν το 1 που είναι πεπερασμένο.

Είναι το ήδη διαπραγματευθέν αποτέλεσμα 0,9999….=1

Αφού γίνει η διαπραγμάτευση με τις ομάδες και την τάξη, παρουσιάζει και το παράδειγμα με την Γεωμετρική Σειρά οπτικά:



Κάθε ένα από τα μεγάλο κίτρινα τετράγωνα έχει εμβαδόν 1^2=1.

Όταν τα χωρίσουμε στην μέση είτε με μεσοκάθετο σε μια πλευρά, είτε με διαγώνιο και αυτό το συνεχίζουμε απεριόριστα, τότε μπορούμε να πάρουμε έχουμε το εξής απεριόριστο άθροισμα:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu}}+\cdots$ το οποίο φαίνεται να πλησιάζει το 1 συνεχώς σε κάθε πεπερασμένη προσέγγιση και να γίνεται τελικά 1 όταν έχουμε «συντελεσμένη την άπειρη προσέγγιση.» Αλλά μπορούμε να το υπολογίσουμε όπως και το 0,999…=1

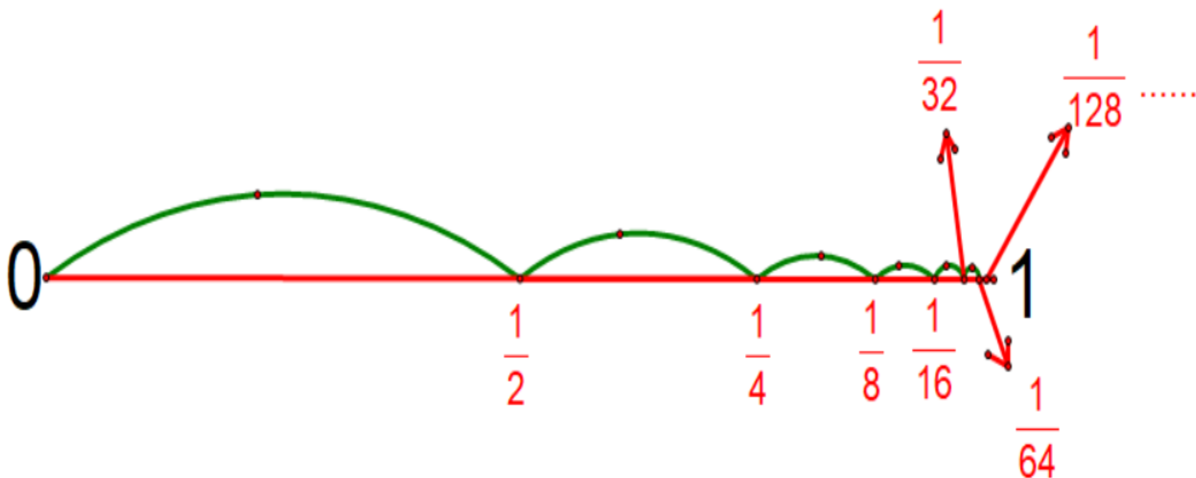
$$\chi = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu}}+\ldots$$

$$2\chi = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu-1}}+\frac{1}{2^{\nu}}+\ldots$$

$$2\chi-\chi=1$$

$$\chi=1$$

Επίσης επιδεικνύεται και το επόμενο σχήμα με έμφαση στην γεωμετρική διαδικασία σύγκλισης, στο ότι ***«όσο κοντά και έχουμε πλησιάσει στο 1, πάντα μπορούμε να πλησιάσουμε «οσοδήποτε πιο κοντά»[13] με διχοτόμηση του εναπομένοντος διαστήματος» Δηλ. το οποιοδήποτε πεπερασμένο άθροισμα που απέχει από το 1 απόσταση α, πλησιάζει ακόμα πιο κοντά α/2 . Άρα το επ άπειρον άθροισμα ισούται με 1 .***



Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε:

---

[13] Η έννοια του «οσοδήποτε κοντά» είναι μια κεντρική -πυρηνική έννοια του Απειροστικού Λογισμού , απολύτως θεμελιώδης για την έννοια του ορίου και της σύγκλισης. Για παράδειγμα όταν λέμε «Δύο αριθμοί α και β είναι «οσοδήποτε κοντά» αποδεικνύεται ότι α=β. Η ιδέα της απόδειξης γι αυτό, είναι εύκολα κατανοητή με απαγωγή σε άτοπο: Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι ίσοι, τότε θα έχουν μια απόσταση μεταξύ τους ας την πούμε χ, όσο μικρό και να είναι αυτό το χ. Όμως, υπάρχει και η απόσταση χ/2, που είναι το ήμισυ της πρώτης, άρα οι α,β, δεν απέχουν «οσοδήποτε κοντά!» που απαιτείται στην υπόθεση, άρα άτοπο! Δεν απομένει λοιπόν, παρά να είναι ίσοι, δηλ. α=β.

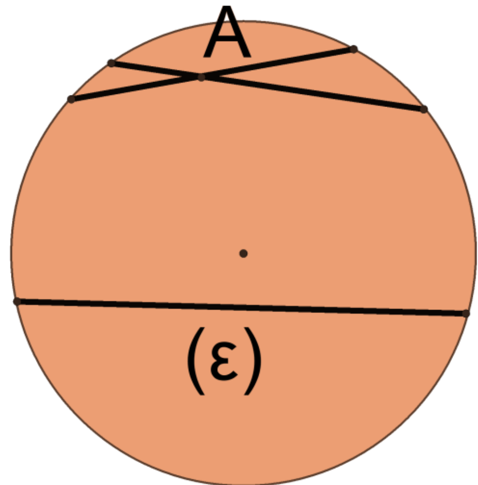
- Ήδη μετά το 1/128, τα βήματα μικραίνουν -σχετικά πάντα- πάρα πολύ.
- Κάνουμε σχεδόν σημειωτόν κοντά στο 1.
- Κάθε φορά που κάνουμε ένα βήμα για το άθροισμα, μένει ένα ίσο βήμα μέχρι το 1, το οποίο κόβουμε στην μέση και πραγματοποιούμε το μισό κ.ο.κ.
- Κάθε φορά που κάνουμε ένα βήμα, με τον τρόπο του ημίσεος υπολειπόμενου βήματος, απομένει ένα άλλο βήμα μέχρι το 1, ίσο με το τελευταίο βήμα. Όμως εμείς κάνουμε πάντα το μισό του εναπομένοντος βήματος μέχρι το 1.
- Απομένουν έτσι πάντα άπειρα άλλα βήματα που δεν έχουμε κάνει μέχρι το 1. Δημιουργείται η εντύπωση ότι πλησιάζουμε «οσοδήποτε κοντά στο 1» αλλά χωρίς και να το φθάνουμε ποτέ.
- Η αλήθεια είναι ότι σε οσαδήποτε πεπερασμένα βήματα δεν το φθάνουμε. Θέλουμε άπειρο χρόνο για να το φθάσουμε και δεν υπάρχει άπειρος χρόνος για επαλήθευση. Αλλά, σε άπειρα βήματα, ανέφικτα μεν από άνθρωπο είτε από αλγόριθμο Η/Υ, το φθάνουμε!
- Όποιο βήμα και να είμαστε, πίσω μας έχουμε πάντα πεπερασμένα βήματα, ενώ μπροστά μας πάντα άπειρα!
- Από την αρχή γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα του άπειρου αθροίσματος είναι 1 διότι εργαζόμαστε σύμφωνα με το παρακάτω μοτίβο:

$$1=1,\ 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2},1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8},1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32},1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64},\textit{τελικά}:$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots$$

10.Το Μοντέλο του Κλάϊν για την Υπερβολική Γεωμετρία



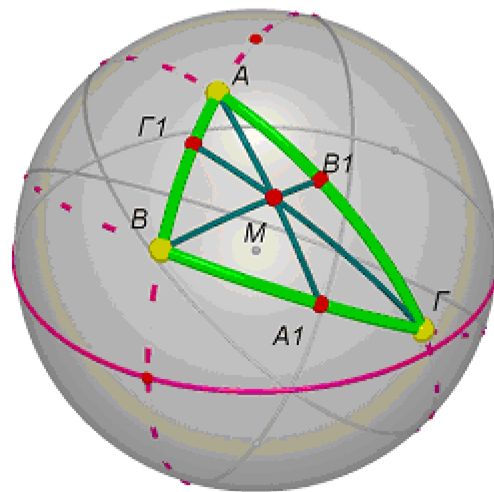
Στην Υπερβολική Γεωμετρία, *«από σημείο Α εκτός ευθείας(ε) άγονται τουλάχιστον δύο διαφορετικές ευθείες παράλληλες προς αυτήν.» Αυτό είναι αντίθετο με το 5^o Αξίωμα του Ευκλείδη όπου προβλέπει ότι «από σημείο Α εκτός ευθείας (ε) άγεται μοναδική παράλληλη προς αυτήν.» Μόνο αυτή η αλλαγή στο αξίωμα φτιάχνει τουλάχιστον δύο άλλες Γεωμετρίες αφού η άρνηση στην πρόταση «άγεται μοναδική παράλληλος προς αυτήν» είναι «Δεν άγεται μοναδική παράλληλος προς αυτήν» ο οποία λογικά μεταφράζεται στο «άγονται τουλάχιστον δύο ή καμία παράλληλες/η προς αυτήν» . Το μοντέλο αυτή της μίας διαφορετικής Γεωμετρίας που υλοποιούν το « τουλάχιστον δύο» (υπάρχουν διάφορα) υλοποιείται στο διπλανό σχήμα:*

- Το επίπεδο είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρίς όμως τον κύκλο (όπως το (0,1) που δεν έχει άκρα-πέρατα)
- Το επίπεδο αυτό είναι **απέραντο** αφού δεν έχει **πέρατα**
- Κάθε ευθεία σε αυτό, έχει ανοικτά άκρα είναι σαν το διάστημα (0,1)
- Κάθε ευθεία είναι **απέραντη.**
- Στο Α έχω δύο ζεύγη αντικείμενων ημιευθειών: Έχουν όλες αρχή το Α και δεν έχουν τέλος . (Όπως ισχύει με το $(0,1)=(0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},1)$
- Από σημείο Α εκτός ευθείας (ε) άγονται πάνω από μία παράλληλες προς αυτήν. (Δύο ή και παραπάνω)

11.Ένα μοντέλο της Παραβολικής Γεωμετρίας[14]

Σε μια επιφάνεια μιας σφαίρας υλοποιείται η σφαιρική Γεωμετρία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως μοντέλο Παραβολικής Γεωμετρίας

[14] Το σχήμα έχει ληφθεί από Μαθηματική Εργασία των Δόρντσιου Κ. & Τσιντσιφά Γ. εδώ: https://docplayer.gr/33351353-Ypervoliki-geometria-to-montelo-toy-poincare-meros-a-kai-meros-v-meros-a.html



αφού υλοποιεί το «από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλος προς αυτήν.» Ποιες όμως θεωρούμε ως ευθείες σε αυτό το μοντέλο όπως βλέπουμε στο σχήμα;

- Η απόσταση AB πάνω στην σφαίρα όπως περίπου είναι και η Γη, πρέπει να υλοποιεί την διαισθητική απαίτηση που υλοποιείται σε όλες τις γεωμετρίες, ότι «η ευθεία υλοποιεί την ελάχιστην απόσταση μεταξύ δύο σημείων» Αυτή η απαίτηση πάνω σε μια σφαίρα υλοποιείται με τόξο (Δεν μπορούμε να τρυπήσουμε την Γη για να εννοήσουμε μια χορδή που δεν έχει νόημα όταν είμαστε πάνω της) Και δεν υλοποιείται με οποιοδήποτε τόξο, **αλλά με τόξο μέγιστου κύκλου**. Όταν ένας μέγιστος κύκλος σφαίρας διέρχεται από δύο σημεία πάνω στην σφαίρα, αυτή η απόσταση είναι η μικρότερη δυνατή την οποία ακολουθούν υποχρεωτικά και για οικονομία χρόνου και καυσίμων και τα πλοία και τα αεροπλάνα που δεν δεσμεύονται απολύτως από το ανάγλυφο του εδάφους.
- Αφού το «τόξο μέγιστου κύκλου» είναι το «ευθύγραμμα τμήμα» αυτής της νέας Γεωμετρίας, αναγκαστικά **ο μέγιστος κύκλος θα είναι η …ευθεία!** Τότε όμως πώς υλοποιείται ότι «μια ευθεία οφείλει να είναι απέρναντη;» Η απάντηση είναι ότι ο κύκλος, δεν έχει ούτε αρχή, ούτε τέλος άρα υλοποιεί το «α-πέραντος.»

Εργασία για το σπίτι.

Α) Πόσα κλάσματα υπάρχουν ανάμεσα σε δύο άλλα

Ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{1}{71} και \frac{2}{71}$ μπορούμε να βρούμε ένα εκατομμύριο διαφορετικά άλλα κλάσματα; Τελικά, πόσα μπορούμε να βρούμε;

Β) Μαντεψιά ψηφίων, χωρίς εκτέλεση διαίρεσης

Αν 1/7=0,142857142875142875…..δηλ. είναι δεκαδικός περιοδικός με 6 περιοδικά ψηφία, τότε ο 6/7 που είναι το συμπλήρωμα του1/6 για την

μονάδα πόσα περιοδικά στοιχεία θα έχει και ποία; (Χωρίς να κάνετε διαίρεση)

Γ) Μαντεψιά κλάσματος όταν ξέρουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα συγκεκριμένου άλλου.

Αν 1/11 =0,0909090909090909…, τότε 0,90909090909090…=;

Δ) πόσοι τρόποι υπάρχουν να γραφεί ο ίδιος αριθμός στο δεκαδικό σύστημα;

Ο αριθμός 5 γράφεται στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης όπως ήδη τον γράψαμε, δηλ. ως 5. Υπάρχει άλλος τρόπος να γραφεί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης;

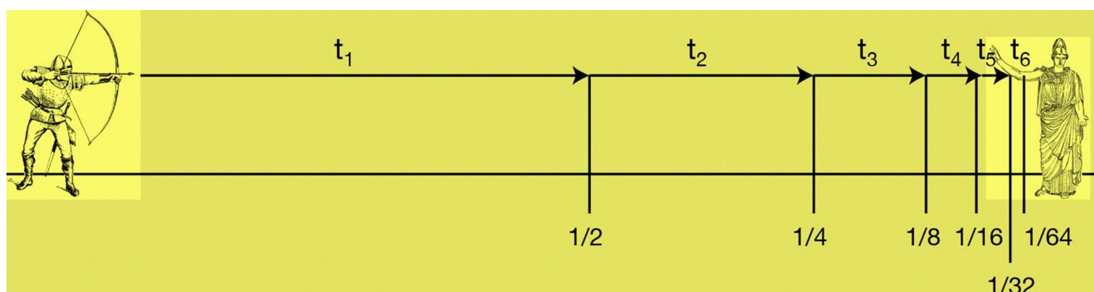
Ε) Ερώτημα για μια ανισότητα:

Ισχύει ότι 1,24>1,2399999… ;

Σχόλιο: Τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία είναι ίσα. Το ότι το τρίτο δεκαδικό είναι 4, μεγαλύτερο του 3 που είναι το τρίτο στον δεύτερο αριθμό, οδηγεί στην ισχύ της ανισότητας, όμως υπάρχει η ισότητα.

ΣΤ) Το βέλος που δεν φθάνει στον στόχο του.

Ο Ζήνων ο Ελεάτης ένας διάσημος φιλόσοφος από την Ελέα της Κάτω Ιταλίας, έλεγε ένα παράδοξο[15] : «Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε ένα βέλος προς τον στόχο του: Σε χρόνο t_1 θα έχει διανύσει το μισό της απόστασης



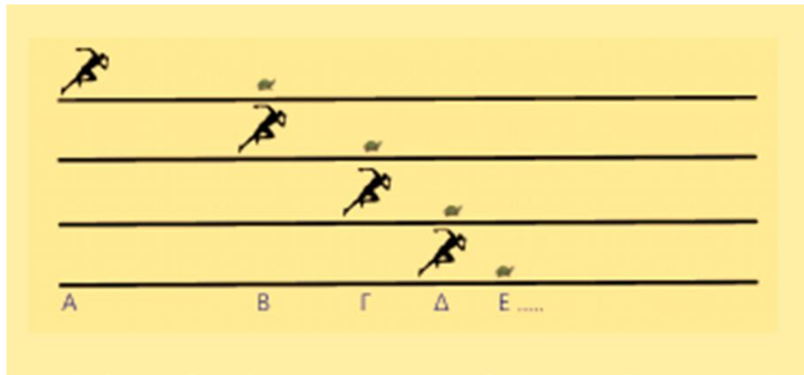
προς τον στόχο. Σε χρόνο t_2 θα έχει διανύσει το μισό της εναπομένουσας απόστασης (1/4) Σε χρόνο t_3 θα έχει διανύσει το μισό της υπόλοιπης εναπομένουσας απόστασης . Με αυτό τον τρόπο, έχουμε συνεχώς και απεριορίστως επ΄ άπειρον, να απαιτείται και ένας νέος χρόνος. Άρα το βέλος δεν φθάνει …ποτέ τον στόχο του!

[15] Μια προσπάθεια συγκέντρωσης όλων των παραδόξων του Ζήνωνα είναι στην Βικιπαίδεια εδώ: https://el.wikipedia.org/wiki/Παράδοξα_του_Ζήνωνα/

Τι έχετε να αντιπαραθέσετε στον Ζήνωνα με βάση το σημείο 8 του Φύλλου Εργασία σας υποθέτοντας ότι το βέλος ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα; Μπορείτε μαθηματικά και αξιόπιστα να λύσετε το διάσημο παράδοξο του Ζήνωνα του Ελεάτη;

Ζ) Ο Αχιλλέας και η Χελώνα

Υπάρχει και το πιο γνωστό παράδοξο του Ζήνωνα, αυτό του Αχιλλέα και της Χελώνας. Σύμφωνα με αυτό, η χελώνα είναι σε απόσταση s, προπορευόμενη από τον γοργοπόδαρο («τον ωκύποδα») Αχιλλέα, ο οποίος τρέχει πολύ ταχύτερα, να την φθάσει. Σύμφωνα με τον Ζήνωνα, μέχρι να διανύσει ο Αχιλλέας την απόσταση s σε χρόνο t , που τον χωρίζουν από την χελώνα, αυτή θα έχει κάνει κάποιο νέο διάστημα s_1. Μέχρι να καλύψει ο Αχιλλέας το νέο διάστημα s_1 σε χρόνο t_1 , αυτή θα έχει διανύσει κάποιο διάστημα s_2. Μέχρι να καλύψει ο Αχιλλέας το s_2 σε χρόνο t_2, αυτή θα έχει διανύσει ένα s_3. Μέχρι να καλύψει το s_3 σε χρόνο t_3 αυτή θα έχει πάει πιο μπροστά σε s_4 κ.ο.κ. Ο Ζήνωνας υποστήριζε, ότι με αυτή την λογική που παρουσίαζε, ο Αχιλλέας, δεν θα φθάσει ποτέ την Χελώνα, αφού πάντα η χελώνα θα θέλει κάποιο νέο χρόνο.



Εσείς υποθέτετε ότι η χελώνα τρέχει με σταθερή ταχύτητα 10m/min και ο Αχιλλέας με διπλάσια ταχύτητα 20m/min , αρχικά απέχουν s=20m , απόσταση την οποία καλύπτει ο Αχιλλέας σε t= 1min .

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική του Ζήνωνα πώς θα ανατρέψετε τον συλλογισμό του;

Να ληφθούν υπ όψιν τα εξής:

Πολλοί ξεκινούσαν να λύσουν το πρόβλημα με διατυπώσεις του τύπου «…έστω ότι θα συναντηθούν μετά από χρόνο τ, τότε ο Αχιλλέας θα έχει διανύσει χ=20τ και η χελώνα ψ=10τ . Μεταξύ των χ,ψ, ισχύει η σχέση

χ-ψ=20, άρα 20τ-10τ=20, από όπου συμπεραίνουμε 10τ=20 και τ =10min.

Σε αυτούς υποθέτουμε ότι έλεγε ο Ζήνωνας: «Εγώ σου εξηγώ ότι ποτέ δεν την φθάνει και εσύ μου λες "έστω ότι την φθάνει;"….»

Το ίδιο υποθέτουμε ότι έλεγε ο Ζήνωνας και σε αυτούς που ξεκινούσαν την λύση με την παραδοχή «έστω ότι θα συναντηθούν σε απόσταση h. Τότε ο Αχιλλέας θα έχει κάνει χρόνο …. κτλ» Θα τους διέκοπτε και θα τους έλεγε την ίδια φράση! **Φυσικά όλοι ξέρουν πολύ καλά και καλύτερα από όλους ο Ζήνωνας, ότι στην πράξη, την φθάνει και την ξεπερνάει!** Το ζητούμενο λοιπόν, είναι να αποδειχθεί σε τι πάσχει η ίδια η λογική του Ζήνωνα και με την ίδια προσέγγισή του, να αποδειχθεί ότι την φθάνει σε πεπερασμένο χρόνο και όχι σε άπειρο που θέλει η συλλογιστική του Ζήνωνα!



Η) Αφού το [0,1) δεν έχει δεξί άκρο, μπορεί ακουμπήσει ένα επίπεδο με ένα σημείο του;

Έχουμε ένα μυστήριο : Θεωρούμε το [0,1) ως «ανοικτό δεξιά» ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Το μέρος του 1, είναι προς το Β . Το ΑΒ, δεν έχει άκρο Β. Δηλ. το Β που γράφουμε, είναι «χωρίς το Β» . Ας πούμε ότι πλησιάζουμε το ΑΒ σε ένα επίπεδο με την «μη άκρη» που είναι το Β.

Τι φαντάζεστε ότι θα μπορούσε να συμβεί; **Αφού δεν έχει άκρα**, σε ποιο σημείο θα μπορούσε να «ακουμπήσει» το επίπεδο;

Μία απάντηση: ισχύει ότι [0,1)U {1} =[0,1] . Δηλ. αν φανταστούμε να πλησιάζει το επίπεδο κάθετα, όταν το Α θα είναι σε απόσταση 1, θα υπάρχει ένα σημείο του επιπέδου, που καθέτως πάνω του, θα είναι όλοι οι

αριθμοί οι μικρότεροι του 1. Αυτό το σημείο του επιπέδου θα έχει «την θέση 1»

Το σημείο στην θέση 1 δηλαδή, θα είναι στο επίπεδο. Δηλ. το [0,1) δεν ακουμπάει με δικό του σημείο το επίπεδο, αλλά με σημείο του επιπέδου.

Θ) Το [0,1) έχει «περίπου μήκος 1» ή «ακριβώς 1;»[16]

Το μήκος του [0,1] προφανώς είναι 1, όπου γενικώς ισχύει ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων α,β είναι |α-β| Τι φαντάζεστε για το μήκος του [0,1); Είναι 1 ή περίπου 1; Έχετε επιχείρημα μαθηματικό και ποιο;

Επιζητούμενες πιθανές απαντήσεις :

- Το μήκος ενός διαστήματος είναι το απόλυτο της διαφορά των άκρων του. Όταν έχει χαθεί το ένα άκρο όπως εδώ το άκρο 1, όποιον αριθμό και να παίρνω προς το μέρος του 1, λ.χ. τον α, όπως έχουμε δείξει, πάντα θα υπάρχει και ένας μεγαλύτερος προς το μέρος του 1, πχ. Ο μέσος όρος τους ο $\frac{a+1}{2}$. Αυτό δεν έχει σταματημό, αφού μεταξύ 1 και $\frac{a+1}{2}$ μπορώ να βρω νέο μέσον όρο κ.ο.κ. επ΄άπειρον. Με αυτή την λογική για κάθε μήκος του διαστήματος που βρίσκω, υπάρχει ένα μεγαλύτερο. Αφού το μήκος είναι ένα και μοναδικό, δεν μπορώ να βγάλω αποτέλεσμα με αυτή την λογική. Αρχίζω να βλέπω το 1, ας είναι το 1 έξω από το διάστημα. Το 1 μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο πρώτος μεγαλύτερος αριθμός στα δεξιά του διαστήματος [0,1) που δεν έχει καθόλου απόσταση από το σύνολο καθώς στέκει στα δεξιά του συνόλου και αριστερά στέκουν όλοι οι μικρότεροί του μη αρνητικοί **Καθώς ΔΕΝ απέχει καθόλου από το [0,1)** [17] το μήκος του [0,1) είναι ακριβώς το |1-0|=1

---

[16] Την συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσαμε να την φανταστούμε στην Γ΄ Λυκείου. Όμως λόγω των γνωστών ενασχολήσεων με τις Πανελλαδικές αυτό «απαγορεύεται» . Επιτρέπεται όμως και μάλλον ενδείκνυται ως ερώτημα στους πρωτοετείς του Μαθηματικού στον Απειροστικό στην εισαγωγική Τοπολογία του R , πριν να έχουν κάνει οτιδήποτε από Θεωρία Μέτρου.

[17] Διότι αν απείχε ένα απειροελάχιστο θ, θα είχαμε κι άλλους μικρότερους του 1, ενώ ΟΛΟΙ είναι στο [0,1) Ουσιαστικά βλέπουμε, ότι ενώ δεν υπάρχει ο «αμέσως επόμενος ή αμέσως προηγούμενος αριθμός» ενός πραγματικού είτε ρητού, υπάρχει ο «αμέσως επόμενος αριθμός είτε προηγούμενος ενός συνόλου που έχει ανοικτό άκρο δεξιά είτε αριστερά, αντιστοίχως. Ο επόμενος αριθμός του συνόλου [0,1) υπάρχει και είναι ο 1, που απέχει από το σύνολο μηδενική απόσταση, δηλ. ο 1 «ακουμπάει» είτε «εφάπτεται» του [0,1) και είναι ο μόνος με αυτή την ιδιότητα για το συγκεκριμένο σύνολο. Στα μαθηματικά το λέμε «ελάχιστο άνω φράγμα» ή supremum (ή αντιστοίχως για αριστερά ανοικτό «μέγιστο κάτω φράγμα»-infimum) . Οι έννοιες αυτές , όχι ως ονόματα αλλά ως φυσικές εποπτικές γεωμετρικές έννοιες δεν έχουν κάποια δυσκολία πρόσληψης και είναι μια προπαίδεια για

- Κάποιος μπορεί να επιχειρηματολογήσει πολύ απλά Γεωμετρικά, ότι «αφού ένα σημείο είναι αδιάστατο δεν έχει μήκος, άρα αφαιρώντας ένα αδιάστατο σημείο από το [0,1] και έχοντας το [0,1) δεν θα έχω μεταβολή μήκους.
- Κάποιος μπορεί να ξεκινήσει «όπως με το βέλος που δεν φθάνει ποτέ στον στόχο του.» Ξεκινάμε από το 0 και μέχρι το ½ είμαστε μέσα στο σύνολο, μέχρι το ½ + ¼ , μέσα, με οποιοδήποτε βήμα μέσα **και με επ΄άπειρον βήματα μέσα, φθάνουμε στο μήκος 1.**
- Ξεκινάμε με πιο κοντινά βήματα προς τον στόχο:

$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+...\frac{9}{10^\nu}$ Όλα τα βήματα είναι μέσα στο σύνολο και επ΄άπειρον κάνουν ένα , αφού είναι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με το 0,9999…=1 .

- Σε μια συνεχή προς τα δεξιά κίνηση προς το 1[18], οσοδήποτε κοντά αριστερά στο 1, διαρκώς αυξάνεται το μήκος

τον Απειροστικό Λογισμό που δεν κάνουμε στα Λύκεια και ξέρουμε ότι προβληματίζουν πρωτοετείς φοιτητές στο πρώτο μάθημα Απειροστικού που κάνουν.

[18] Υπάρχουν και διαφορετικές λ.χ. ταλαντευόμενες κινήσεις προς κάποιος αριθμό κάνοντας π.χ. μια φθίνουσα ταλάντωση μπρος-πίσω από έναν αριθμό μέχρι μετά από άπειρα βήματα να σταθεροποιηθούν πάνω του. Αυτό το παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η ακολουθία $\alpha_\nu=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\nu},\quad \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\\ -\frac{1}{\nu},\ \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\end{array}\right\}$ Κάθε κλάσμα άρτιου παρονομαστή πλησιάζει από δεξιά το 0 και κάθε κλάσμα με περιττό, από αριστερά. Οι μαθηματικοί λένε η ακολουθία «πλησιάζει απεριόριστα κοντά το 0» . Το λένε και ως η ακολουθία «πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο 0» εκφράσεις που έχουν μια πιο φορμαλιστική επεξήγηση με τον «εψιλοντικό» ορισμό της σύγκλισης. Υπάρχουν όμως και εναλλακτικές εκφράσεις -όχι και τόσο πολύ αυστηρές Μαθηματικές- που χρησιμοποιούνται: Όπως η γενική έκφραση *«μετά από άπειρα βήματα θα σταθεροποιηθεί-ακινητοποιηθεί πάνω στο 0 »* η οποία έχει δύο ισοδύναμα, **φαινομενικά** αντιφαντικά, πορίσματα : 1) ότι η ακολουθία «δεν σταθεροποιείται ποτέ πάνω στο 0» και 2) ότι η ακολουθία «σταθεροποιείται στο 0 μετά από άπειρα βήματα» Πώς είναι δυνατόν άραγε να ισχύουν και τα δύο χωρίς να αντιφάσκουν μεταξύ τους; Η απάντηση που πρέπει να κατανοήσει ο αναγνώστης ξεκινά από την εξής αφαιρετική σκέψη που πρέπει να κάνει με επιτυχία κόντρα στην φύση της ανθρώπινης υπόστασής του και της μαθησιακής του στάσης και της διδακτικής του πρακτικής και της πεπερασμένης φύσης του στον χρόνο: ότι **«Τα μαθηματικά είναι άχρονα»** Αυστηρά και μόνον για διδακτικούς λόγους όλοι οι δάσκαλοι των μαθηματικών, όσο αυστηροί και να είναι στο να μην χρησιμοποιούν εξωμαθηματικές εκφράσεις, χρησιμοποιούν γι να εξηγήσουν τα μαθηματικά εκφράσεις χρόνου, ταχύτητας κίνησης όπως ακριβώς κάναμε και εμείς στην παρούσα εργασία για να εξηγήσουμε τα επιστημολογικά εμπόδια στην έννοια του ορίου. Όταν το κάνεις αυτό, είναι σαν να καταστρέφεις ένα εμπόδιο που τίθεται μπροστά σου και με τα συντρίμμια του να φτιάχνεις ένα άλλο τείχος δίπλα του. Ομιλούμε ακριβώς για την λογική του φαύλου κύκλου στην Διδακτική του Ορίου. Όλα ξεκίνησαν από την αρχαιότητα, όπου ο Αριστοτέλης προέκρινε την αντίληψη του απείρου ως «εν δυνάμει» δηλ. ως κάτι που αυξάνει συνεχώς. Αυτή η επεξήγηση που δίνουμε αυτή την στιγμή στην έννοια «εν δυνάμει» χρησιμοποιεί το χρονικό επίρρημα «συνεχώς» θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την λεκτική έκφραση -έννοια «στο διηνεκές» Ό,τι

I) Η διχοτόμηση ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ

Έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσον του Ο . Αποκόπτοντας τα δύο μισά, έχουμε λ.χ. το ΑΟ και το ΟΒ. Επειδή όμως το Ο είναι συγκεκριμένο και μοναδικό, δεν μπορεί να ανήκει και στα δύο ημίσεια.

Υπάρχει κάτι το παράδοξο σε αυτό ή όχι;

Πιθανές διαπραγματεύσεις:

- Έχουμε το σχήμα [Α,Ο] και (Ο,Β] . Δηλ. το Ο θα ανήκει μόνο σε ένα από τα δύο. Όμως τα μήκη τους θα είναι ακριβώς ίσα.
- Τα δύο σχήματα δεν είναι ίσα, αφού «δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.»[19] Άρα με αυτό τον ορισμό δεν είναι ίσα. (Έχει δίκιο όποιος μπορέσει να σκεφθεί τέτοια απάντηση)
- Αν θεωρήσουμε το Ο ως κέντρο στροφής και στρίψουμε το ένα από τα δύο ημίσεια κατά 90^0 έχουμε πλήρη σύμπτωση, αλλά αυτό δεν είναι η απάντηση στην προηγούμενη ένσταση, καθώς αν κοπούν τα

και αν χρησιμοποιήσουμε, έχει χρόνο και όταν ο χρόνος συνεχίζεται επ΄ άπειρον, σε μια διαδικασία επαναληπτική με βήματα, απλώς ποτέ δεν τελειώνει, απλώς δεν δίνει ποτέ αποτελέσματα, απλώς δεν περατούται και μας δημιουργείται η εξαιρετικά εδραία ακλόνητη πεποίθηση ότι «όλο πλησιάζουμε και ποτέ δεν φθάνουμε» Στην θεωρία Αλγορίθμων, όπως έχουμε ξανα-εξηγήσει, το ξέρουν πολύ καλά αυτό το αποτέλεσμα γι αυτό ως αλγόριθμο ορίζουν οποιαδήποτε διαδικασία που δίνει απαντήσεις-λύσεις σε πεπερασμένα -αυστηρά- βήματα. Γι αυτό άλλωστε ενδιαφέρονται για τα λεγόμενα «διακριτά Μαθηματικά» και όχι για τα «συνεχιστικά!»
Η άλλη οπτική του απείρου -που δεν παραδεχόταν ο Αριστοτέλης αλλά καθιέρωσε και εδραίωσε ο Καντόρ- ως δηλ. μια οντότητα «τελειωμένη» Όπως λ.χ. γράφουμε το $\mathbb{N}$ ως ένα σύμβολο με τρία τεθλασμένα ευθύγραμμα τμήματα και εννοούμε σύνολο εμπεριέχον άπειρες οντότητες ή όπως το γράφουμε ως $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,...\}$ όπου κλείνουμε στο τέλος το άγκιστρο και μέσα του έχουν άπειρες μαθηματικές οντότητες. Αυτό το «ολοκληρωμένο άπειρο» είναι αχρονικό εξ ορισμού του, καθώς το θεωρούμε «επιτελεσμένο» αν και άπειρο, «τετελεσμένο» , ενώ είναι άπειρο!
Έτσι λοιπόν, φθάνουμε στα εξής: Για την ακολουθία $\alpha_\nu=\begin{cases}\frac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\\ -\frac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\end{cases}$ άλλοι λένε ότι «όλοι οι όροι της πλησιάζουν το μηδέν, αλλά **ποτέ** (=χρονικό!) δεν γίνονται μηδέν» ενώ άλλοι λένε «τελικά επ άπειρον, η ακολουθία μηδενίζεται» με τους μη αντιλαμβανόμενους ότι πρόκειται περί δύο διαφορετικών οπτικών του ιδίου πράγματος, να απαιτούν από τους συνομιλητές τους να τους δείξουν προκλητικά **πότε ένας όρος της α_ν γίνεται 0 αφού ο αριθμητής είναι πάντοτε μη μηδενικός , ενώ στο α-χρονικό επιτελεσμένο άπειρο, η ακολουθία γίνεται 0, με εντελώς ανάλογο τρόπο, που το [0,1) έχει μήκος 1 και όχι περίπου 1.**
Να σημειώσουμε, ότι αν είναι γνωστή η προσθετική ιδιότητα του μέτρου, και ότι το μέτρο στο για το R , είναι μ([α.β])=|β-α| , τότε μ([α,β])= μ([α,(α+β)/2])+μ([((α+β)/2,β])ή |β-α|=|α-(α+β)/2|+χ κτλ τελικά μ([κ,λ])=μ([κ,λ)) , από όπου τελικά κλειστό και ανοικτό διάστημα με τα ίδια άκρα, έχουν ίσα μέτρα.

[19] Σχολικό Βιβλίο Γεωμετρίας Κεφ. 2.7 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων Ίσα ευθύγραμμα http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A101/574/3720,16298/

δύο ημίσεια το Ο θα πάει σε ένα από τα δύο, θα περισσεύει και τα δύο σχήματα παρ΄ ότι ίσου (ακριβώς) μήκους, δεν είναι συμπτώσιμα κατά τον Ευκλείδειο ορισμό που ακολουθούν όλα τα βιβλία Γεωμετρίας στον κόσμο, πολλούς αιώνες![20]

Διαδικτυακές Αναφορές:

1) https://www.academia.edu/21246646/27._Η_διδασκαλία_του_απείρου_στην_Μέση_Εκπαίδευση/
2) https://www.academia.edu/37949139/103._Περί_της_δυνατότητας_της_μετρήσεως_του_μεγέθους_μήκος_3m_/
3) https://www.academia.edu/21250665/76._Ορισμένες_αποδείξεις_ότι_0.9999_.._1_και_το_γιατί_του_εκπλήσσοντος_αποτελέσματος/
4) https://www.academia.edu/21250376/75._Μαθηματικά_αντικείμενα_και_σχέσεις_στην_υπηρεσία_του_Φιλοσοφικού_και_Μεταφυσικού_στοχασμού/
5) https://www.academia.edu/21250116/62._Για_ποιό_λόγο_όλοι_τελικά_οι_αριθμοί_είναι_απειροψήφιοι/

[20] Ας δούμε όμως τι ισχύει στην πραγματικότητα: Αν από το ένα ήμισυ αφαιρέσουμε άπειρα σημεία, αριθμήσιμα , το μήκος του, μαθηματικά, δεν αλλοιώνεται και αυτό συνιστά ένα απλό θεώρημα της Θεωρίας Μέτρου που έχει μόλις 2 αιώνες ηλικία, ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία και πριν τον Ευκλείδη μετά την απόδειξη, 26 αιώνες τουλάχιστον. Ακόμα και από το Σχήμα ενός τετραγώνου αν αφαιρέσουμε άπειρα αριθμήσιμα ευθύγραμμα τμήματα από μέσα του, το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. **Και σε υποκειμενικό επίπεδο, αλλά και αυστηρά λογικό πλαίσιο, μη προσωπικό, δεν νομίζουμε ότι πρέπει να αλλάξει ο ορισμός των ίσων σχημάτων ως προς το «συμπτώσιμων» με κάποιον άλλο, αφού κάποιος άλλος απλός ορισμός, ίσως δεν υπάρχει.** Βλέπουμε δηλ. ότι **αν δύο σχήματα είναι συμπτώσιμα είναι σίγουρα ίσα (1-1). Επίσης-αντιστρόφως- ίσα μπορούμε να θεωρούμε μόνον τα συμπτώσιμα**, αλλά υπάρχουν λ.χ. δύο τετράγωνα με ίσες πλευρές και ίσα εμβαδά, που ως σημειοσύνολα, δεν είναι συμπτώσιμα. Περί αυτού πρόκειται. *Τα συμπτώσιμα είναι ίσα, ενώ τα τεκμαιρόμενα ως ίσα με βάση κριτήρια γεωμετρικά, μπορεί και να μην είναι συμπτώσιμα.*